第13講　図形と方程式(3)

1 [1]　一辺の長さが $2s$ である正三角形ABCの3つの頂点を $\mathrm{A}(-s,\ 0)$，$\mathrm{B}(s,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sqrt{3}s)$ とする．$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=t$ であるような点Pについて，以下の問いに答えよ．

(1)　このような点Pが存在するための実数 s，t についての必要十分条件と，この条件の下での点Pの軌跡の方程式を求めよ．

(2)　点Pの軌跡が頂点Aを通る場合の s と t の関係式を求めよ．また，このときの点Pの軌跡を △ABC とともに図示せよ．

[2]　実数 a と b が $a+b=4$ を満たしながら変化する．このとき，放物線 $y=x^2+2ax+b$ の頂点の軌跡の方程式を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上の3点A(0, 0), B(3, 0), C(1, 3)に対して

- 線分BCを1：kに内分する点をD（kは正の実数）
- 2点A, Dを通る直線をl
- 点Cを中心とし直線lに接する円をS
- 円Sと直線lの接点をP

とする.

(1)　点Dの座標，直線lの方程式，円Sの半径rの値を，それぞれkを用いて表せ.

(2)　kがすべての正の値をとって変化するとき，円Sの半径rがとり得る値の範囲を求めよ.

(3)　kがすべての正の値をとって変化するとき，点Pが描く軌跡の方程式とその範囲を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　3点P(4，-5)，Q(0，3)，R(7，4)を通る円をCとする．

(1)　円Cの方程式を$x^2+y^2+ax+by+c=0$　とおいて，a，b，cの値を求めよ．

(2)　点S(-4，0)を通り，傾きmの直線をlとする．直線lが円Cと2つの交点をもつような傾きmの範囲を求めよ．

(3)　傾きmが(2)の範囲にあるとき，直線lと円Cの2つの交点の中点の軌跡はある円の一部分であることを示し，その軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　図形と方程式(3)

座標平面上の点 A$(-3,\ 1)$ を通る直線 l_1 と点 B$(0,\ 3)$ を通る直線 l_2 が常に直交しながら変化するとき，l_1 と l_2 の交点が描く軌跡は，

円 $\left(x+\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^2+(y-\boxed{\text{ウ}})^2=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．また，この円上の点と原点 O との

距離の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　図形と方程式(3)

1 [1]　一辺の長さが $2s$ である正三角形 ABC の3つの頂点を $A(-s,\ 0)$，$B(s,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3}s)$ とする．$AP^2+BP^2+CP^2=t$ であるような点 P について，以下の問いに答えよ．

(1)　このような点 P が存在するための実数 s，t についての必要十分条件と，この条件の下での点 P の軌跡の方程式を求めよ．

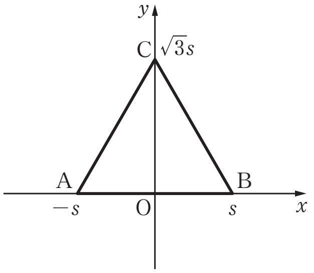
(2)　点 P の軌跡が頂点 A を通る場合の s と t の関係式を求めよ．また，このときの点 P の軌跡を △ABC とともに図示せよ．

(1)　$P(x,\ y)$ とすると，$AP^2+BP^2+CP^2=t$　より

$$(x+s)^2+y^2+(x-s)^2+y^2+x^2+(y-\sqrt{3}s)^2=t$$

$$x^2+y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}sy+\frac{5s^2-t}{3}=0$$

$$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}s\right)^2=\frac{t-4s^2}{3}\quad\cdots\cdots①$$



よって　$\dfrac{t-4s^2}{3}>0$　つまり　$t>4s^2$　のとき　中心 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)$　半径 $\sqrt{\dfrac{t-4s^2}{3}}$ の円

$\dfrac{t-4s^2}{3}=0$　つまり　$t=4s^2$　のとき　点 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)$

以上より，求める条件は　$\boldsymbol{t\geqq 4s^2>0}$　で，P の軌跡の方程式は

$t>4s^2>0$　のとき　$\boldsymbol{x^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)^2=\dfrac{t-4s^2}{3}}$

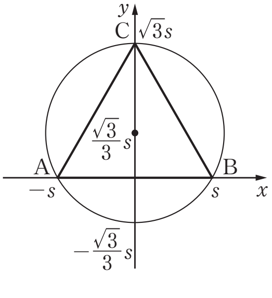
$t=4s^2>0$　のとき　$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)}$

(2)　点 A の座標を①に代入して　$s^2+\dfrac{s^2}{3}=\dfrac{t-4s^2}{3}$　　$\boldsymbol{t=8s^2}$

このとき①は $s>0$ より

中心 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}s\right)$　半径 $\sqrt{\dfrac{8s^2-4s^2}{3}}=\sqrt{\dfrac{4s^2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}s$　の円である．

よって点 P の軌跡は下図．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 ［2］　実数 a と b が $a+b=4$ を満たしながら変化する．このとき，放物線 $y=x^2+2ax+b$ の頂点の軌跡の方程式を求めよ．

$a+b=4$ より　$b=4-a$　　よって　$y=x^2+2ax+4-a=(x+a)^2-a^2-a+4$

よって頂点の座標は $(-a,\ -a^2-a+4)$　これを $(X,\ Y)$ とおくと

$X=-a$ ……①，　$Y=-a^2-a+4$ ……②

①より　$a=-X$　これを②に代入して　$Y=-X^2+X+4$

よって求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{y=-x^2+x+4}$

2 座標平面上の 3 点 A(0，0)，B(3，0)，C(1，3) に対して

- 線分 BC を 1：k に内分する点を D（k は正の実数）
- 2 点 A，D を通る直線を l
- 点 C を中心とし直線 l に接する円を S
- 円 S と直線 l の接点を P

とする．

(1) 点 D の座標，直線 l の方程式，円 S の半径 r の値を，それぞれ k を用いて表せ．

(2) k がすべての正の値をとって変化するとき，円 S の半径 r がとり得る値の範囲を求めよ．

(3) k がすべての正の値をとって変化するとき，点 P が描く軌跡の方程式とその範囲を求めよ．

(1)　$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{3k+1}{k+1},\ \dfrac{3}{k+1}}\right)$　　$l：\boldsymbol{y=\dfrac{3}{3k+1}x}$

$k>0$ より　$r=\dfrac{|3-(3k+1)\cdot 3|}{\sqrt{9+(3k+1)^2}}=\boldsymbol{\dfrac{9k}{\sqrt{9k^2+6k+10}}}$

(2)　$k>0$ より　$r=\dfrac{9}{\sqrt{9+\dfrac{6}{k}+\dfrac{10}{k^2}}}$ ……①　　$\dfrac{1}{k}=X$ とおくと　$k>0$ より　$X>0$

(①の分母)$=\sqrt{10X^2+6X+9}>\sqrt{9}=3$　　よって　$r<\dfrac{9}{3}$　　したがって　$\boldsymbol{0<r<3}$

(3)　$\angle\mathrm{APC}=90^\circ$　かつ　A，C は定点より，

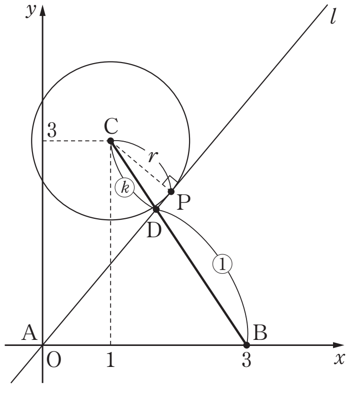
点 P は AC を直径とする円上を動く．

その中心は AC の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　より

求める方程式は　$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}}$

P は l 上の点であり，l が A を定点として直線 AB から



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

直線ACまで動くことにより，図からPはこの円の　$\boldsymbol{1<x\leqq\dfrac{1+\sqrt{10}}{2}}$　の範囲を動く．

3　3点P(4, −5)，Q(0, 3)，R(7, 4)を通る円をCとする．

(1)　円Cの方程式を$x^2+y^2+ax+by+c=0$　とおいて，a，b，cの値を求めよ．

(2)　点S(−4, 0)を通り，傾きmの直線をlとする．直線lが円Cと2つの交点をもつような傾きmの範囲を求めよ．

(3)　傾きmが(2)の範囲にあるとき，直線lと円Cの2つの交点の中点の軌跡はある円の一部分であることを示し，その軌跡を求めよ．

(1)　Cの式にP，Q，Rの座標を代入して

$4a-5b+c=-41$，$3b+c=-9$，$7a+4b+c=-65$　　よって　$\boldsymbol{a=-8,\ b=0,\ c=-9}$

(2)　$C：x^2+y^2-8x-9=0$　つまり　$(x-4)^2+y^2=25$　　$l：y=m(x+4)$

これらより　$(x-4)^2+m^2(x+4)^2=25$

$(m^2+1)x^2+2(4m^2-4)x+16m^2-9=0$　……①

判別式をDとすると

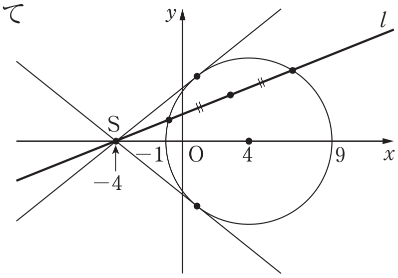
$$\frac{D}{4}=(4m^2-4)^2-(m^2+1)(16m^2-9)=-39m^2+25>0$$

よって　$\boldsymbol{-\dfrac{5}{\sqrt{39}}<m<\dfrac{5}{\sqrt{39}}}$

(3)　(2)のとき　①の2解をα，βとすると，Cとlの2交点の中点の座標$(X,\ Y)$は

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{4m^2-4}{m^2+1}=-4+\frac{8}{m^2+1}\ \cdots\cdots②\qquad Y=m(X+4)\ \cdots\cdots③$$

$X\neq-4$より　③から　$m=\dfrac{Y}{X+4}$　これを②に代入して



$$X+4=\frac{8}{\left(\dfrac{Y}{X+4}\right)^2+1}\qquad X+4=\frac{8(X+4)^2}{Y^2+(X+4)^2}$$

$Y^2+(X+4)^2=8(X+4)$　　よって　$X^2+Y^2=16$

また，$m^2<\dfrac{25}{39}$より

$$m^2+1<\frac{64}{39}\qquad \frac{m^2+1}{8}<\frac{8}{39}\qquad \frac{39}{8}<\frac{8}{m^2+1}\leqq 8\qquad \frac{7}{8}<X\leqq 4$$

よって求める軌跡は　**円**$\boldsymbol{x^2+y^2=16}$　$\boldsymbol{\left(\dfrac{7}{8}<x\leqq 4\right)}$

【別解】　lとCの2交点の中点をM，円Cの中心をC′とすると，∠C′MS＝90°より

Mの軌跡はC′Sの中点(0, 0)を中心とする半径$\dfrac{1}{2}$C′S＝4の円である．

また，lがCと接するとき　$m=\pm\dfrac{5}{\sqrt{39}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$m=\dfrac{5}{\sqrt{39}}$　のとき　$l:y=\dfrac{5}{\sqrt{39}}(x+4)$

これと垂直でC′を通る直線は　$y=-\dfrac{\sqrt{39}}{5}(x-4)$

この2直線の交点の x 座標は　$x=\dfrac{7}{8}$

よって図より，求める軌跡は　**円 $\boldsymbol{x^2+y^2=16}$　$\boldsymbol{\left(\dfrac{7}{8}<x\leqq 4\right)}$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　図形と方程式(3)

座標平面上の点 A$(-3,\ 1)$ を通る直線 l_1 と点 B$(0,\ 3)$ を通る直線 l_2 が常に直交しながら変化するとき，l_1 と l_2 の交点が描く軌跡は，

円 $\left(x+\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\right)^2+(y-\boxed{ウ})^2=\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$ である．また，この円上の点と原点 O との

距離の最大値は $\dfrac{\boxed{キ}+\sqrt{\boxed{クケ}}}{\boxed{コ}}$ である．

l_1 と l_2 の交点を P$(X,\ Y)$ とする．

直線 l_1 の傾きは　$X\neq-3$ のとき　$\dfrac{Y-1}{X+3}$　　直線 l_2 の傾きは　$X\neq0$ のとき　$\dfrac{Y-3}{X}$

直交条件より　$\dfrac{Y-1}{X+3}\cdot\dfrac{Y-3}{X}=-1$

つまり　$(X+3)X+(Y-1)(Y-3)=0$　($X=-3,\ 0$ のときもこれでよい)

$X^2+3X+Y^2-4Y+3=0$　　$\left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2+(Y-2)^2=\dfrac{13}{4}$

したがって，交点 P の描く軌跡は，円 $\left(x+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^2+(y-\mathbf{2})^2=\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}}$　である．

【別解】　l_1 と l_2 の交点を P とすると，A，B は定点であり，P が A，B と異なるときは常に $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ より P は AB を直径とする円周上にある．

P が A と一致するときは，l_2 は 2 点 A，B を通る直線であり，l_1 は A において l_2 と直交する．同様に円周上の点 B も l_1 と l_2 が直交するときの交点である．

また，その円の中心は AB の中点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$，半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{9+4}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

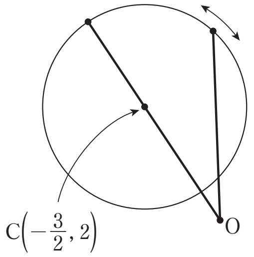
よって，交点 P の描く軌跡は　円 $\left(x+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^2+(y-\mathbf{2})^2=\dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}}$　である．

原点 O と円の中心 $\mathrm{C}\left(-\dfrac{3}{2},\ 2\right)$ の距離は $\mathrm{OC}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+4}=\dfrac{5}{2}$ であり，円の半径は $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

より　OC＞(円の半径)　つまり　点 O は円の外部にある．

したがって，点 O と円周上の点の距離の最大値は

$\mathrm{OC}+(\text{円の半径})=\dfrac{\mathbf{5}+\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{2}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。